



TITLE:

Trapping of a vortex filament (Structure and Dynamics of Nonlinear Wave Phenomena)

AUTHOR(S):

渡辺, 慎介; 舟久保, 悠子

CITATION:

渡辺, 慎介 ...[et al]. Trapping of a vortex filament (Structure and Dynamics of Nonlinear Wave Phenomena). 数理解析研究所講究録 2002, 1271: 233-239

ISSUE DATE:

2002-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/42211>

RIGHT:

Trapping of a vortex filament

横浜国立大学大学院 工学研究院 渡辺慎介 (Shinsuke WATANABE)

横浜国立大学大学院 工学研究科 舟久保悠子 (Yuko FUNAKUBO)

渦糸には多様な運動がある。渦糸上を安定に伝播する波としては、微小振幅平面正弦波、らせん波、渦糸ソリトンが知られている。^{1,2)} また、2本の渦糸が接近しているとき、相互作用により、ヘリカル・ペアリングと呼ばれる2重らせんの絡み合いが見られる。³⁾ 渦糸の2次元運動では、複数の渦糸の相互作用が研究され、それらの運動にはカオス性も報告されている。^{4,5)}

渦糸上を伝播する波動や特定の興味深い渦糸の運動を観測するためには、渦糸の運動を制御する必要がある。我々は、境界面を用いて渦糸の運動を制御してきた。これまでの研究では、渦糸上を伝播する波動の観測を目的として平面円盤を用いた。鉛直な渦糸に直交する水平な平面円盤を振動させて円盤の振動数と等しい摂動を渦糸に与える。この方法によって、らせん運動をする渦糸の分散式を実験的に確認した。今回の実験では、渦糸のトラップを目的として、境界面として球面を用い、球面と接する渦糸の運動について調べた。下に凸の球面と上に凸の半球面の径を変えて実験を行った。

1. 実験の概要

底の中心に穴のあいた円筒容器内に、旋回水流によって渦糸を作る。この渦糸に接する境界面が、図1に示す球面であるときの渦糸の運動について実験を行った。図1(a)の下に凸の境界面では、球の直径 d_a を 14.9mm, 19.8mm, 64.6mm, 100.8mm, 119.7mm に選んで実験を行った。また、図1(b)に示す上に凸の境界面については、球の内径 d_b は 95.3mm, 115.9mm の2通りである。それぞれの場合において、球の位置を円筒容器の中心位置から変えて実験を行った。

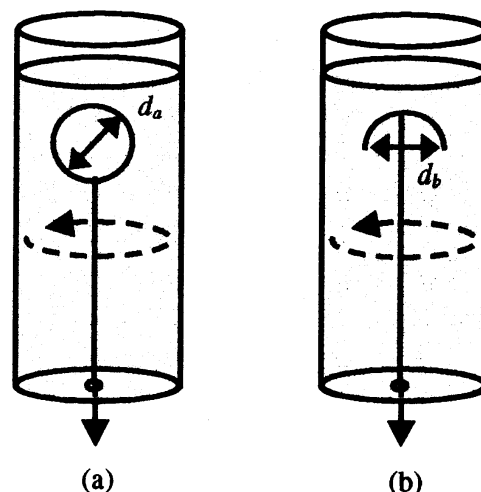


図1 境界面

2. 実験装置

図2に実験装置を示す。底の中心に穴のあいたアクリルの円筒容器内に旋回流によって渦糸を作る。旋回流は円筒容器上部で水を容器の内側側面に沿って流すことで作られる。このとき、渦糸は空気によって可視化される。ここに、円筒容器上部から境界面を挿入する。この境界面は円筒容器上部に設置された取り付け調節部によって、円筒容器の中心からずらすことができる。

アクリル円筒容器の高さは1m、内径は0.3m、そして容器底の中心の穴の大きさは12mmである。

渦糸の運動はデジタルビデオカメラで撮影し、観測した。

3. 実験結果

3.1. 下に凸の球面を用いた実験

図3・図4に、下に凸の球面に対する渦糸の運動を示した。写真の中心部に鉛直方向に伸びる渦糸は

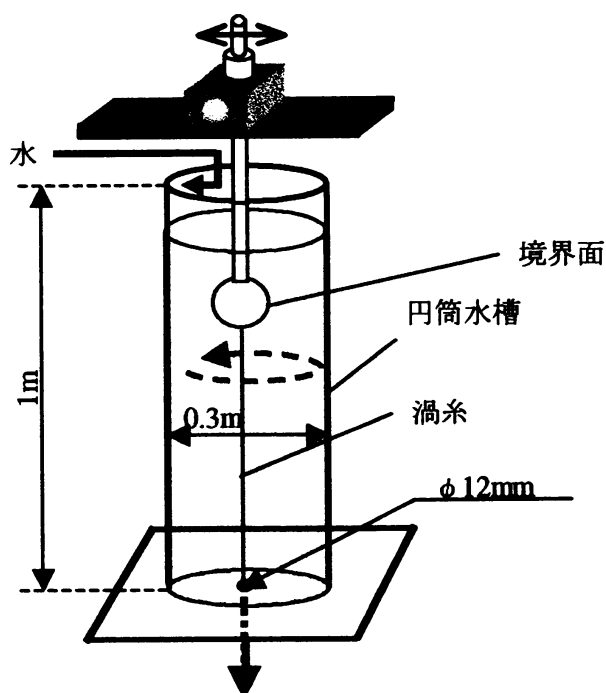


図2 実験装置

表1 各球面について観測できた最大のずれ

球の直径 [mm]	中心位置からの 最大のずれ[mm]
14.9	4
19.8	11
64.6	8
100.8	12
119.7	12

空気によって可視化されている。球の直径 d_a が 19.8mm と 119.7mm の場合について、1sec の時間刻みで渦糸の様子を追っている。図3は円筒容器中心と球の中心が一致しているとき、図4は円筒容器の中心から球の中心がずれているときの運動である。図4では、 d_a が 19.8mm のとき、ずれは 11mm、 d_a が 119.7mm のとき、ずれは 9mm である。いずれの場合も渦糸はほとんど動いておらず、静止状態にある。境界面が中心位置からずれた状態にあるときも渦糸が静止状態を保つことが観察され、境界面上に渦糸をトラップすることができた。

球の境界面が円筒容器の中心位置において渦糸をトラップしている状態から、球の位置を徐々に中心からずらすと、渦糸が球面にトラップされたまま球面とともに移動する様子が観察される。

実験では5種類の直径の球面を用いたが、表1に各直径の球面について渦糸をトラップできる最大のずれを示した。境界面を円筒容器の中心から徐々にずらすと渦糸を可視化している空気が消滅して、観測が難しく

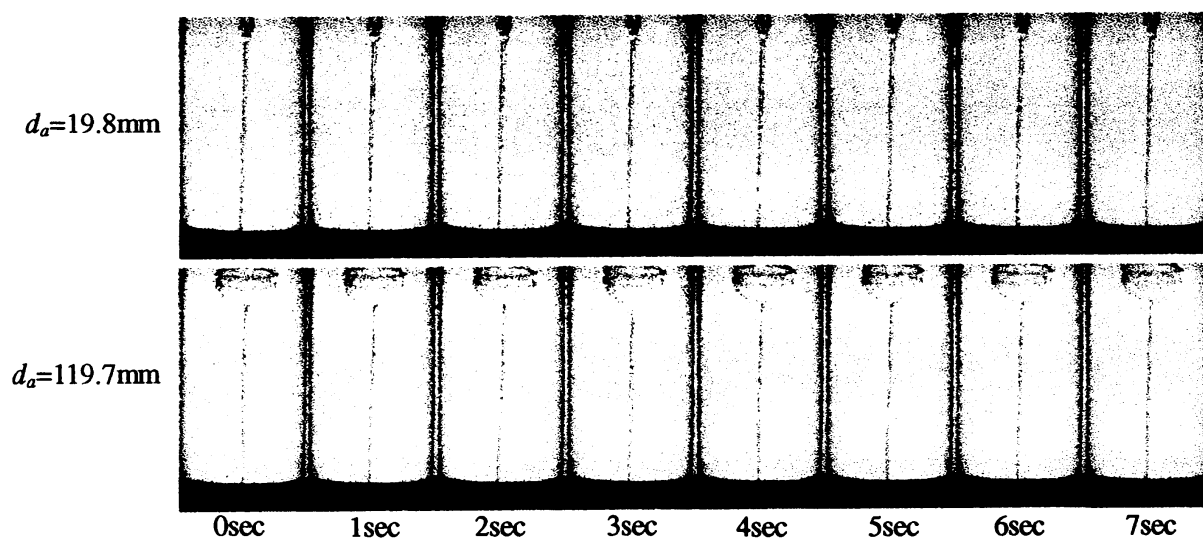


図3 下に凸の球面に対する渦糸（ずれ0mm）

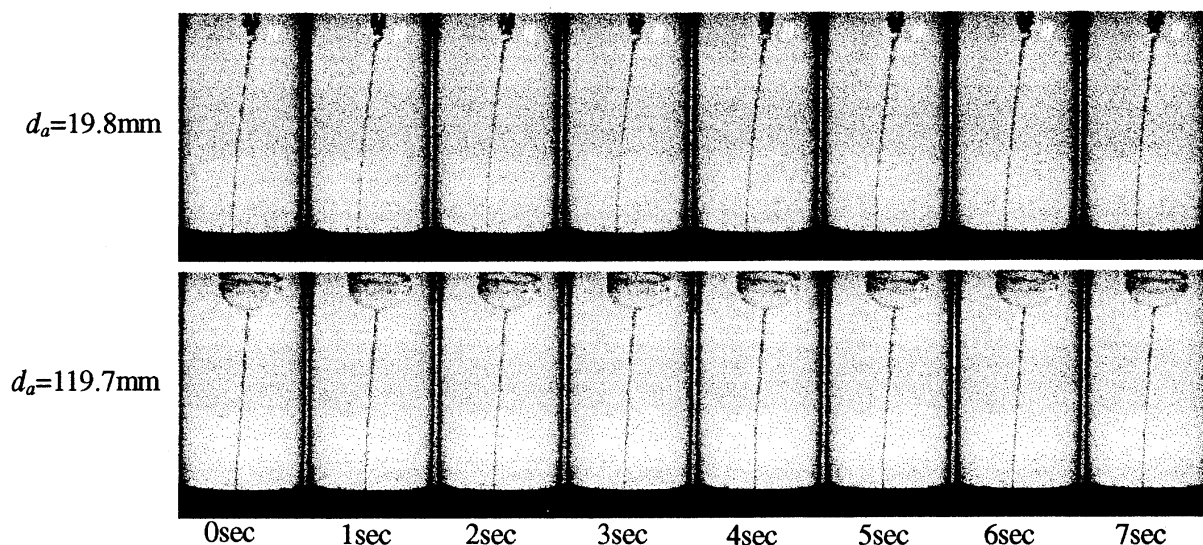


図4 下に凸の球面に対する渦糸

なる。このため球の直径と最大ずれとの正確な関係を得ることはできなかった。しかし、表1において球の直径が19.8mmのときの最大ずれに注目すると、このずれは球の半径よりも大きく、このときは球が円筒容器の中心位置から完全にはずれた状態にある。この状態においても、渦糸は境界面にトラップされ静止している。

3.2. 上に凸の半球面を用いた実験

図5・図6に上に凸の半球面に対する渦糸の運動の示した。球の内径が95.3mmのときの運動を0.1secの時間刻みで示している。図5では中心からのずれは0mm、図6では中心からのずれは9mmである。いずれの場合も境界面に近い渦糸の上部が左右に運動している。これは3次元的回転運動であり、この回転の振幅は一定ではなく、不規則に変化する。図に見られるように、このとき運動しているのは境界に近い渦糸の上部のみで、下部はこの回転運動からの摂動は受けずに静止状態にある。

この回転運動については、図7のように球の中心を0とし、回転運動の一次元の射影を観測した。半球面の中心から球面に沿っての距離を r とし、渦糸の境界面と接している点の r を回転運動の振幅として測定した。また、回転の周期を測定し、これにより運動の時間変動を調べた。図8は半球の内径95.3mmで

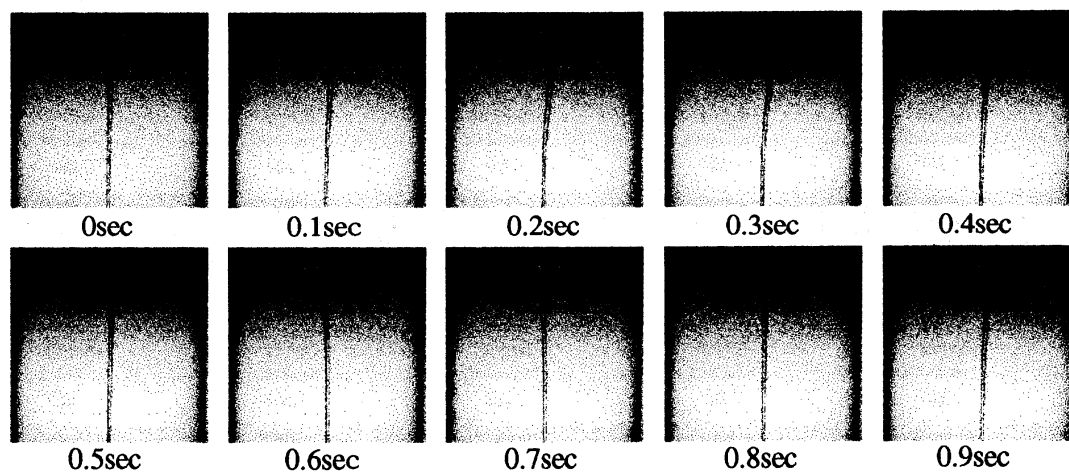


図5 上に凸の半球面に対する渦糸の運動 (ずれ0mm)

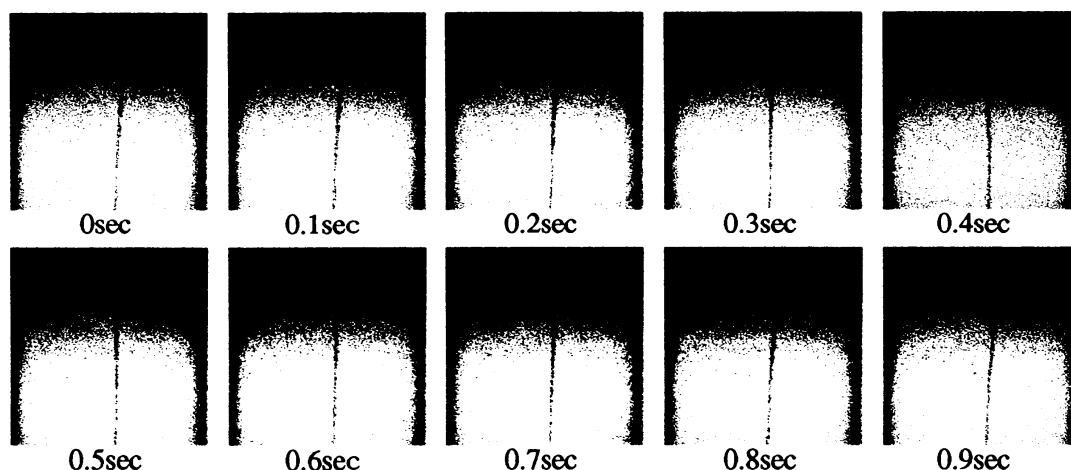


図6 上に凸の半球面に対する渦糸の運動 (ずれ9mm)

の渦糸の運動の時間変動を示し、(a)は円筒容器の中心位置からのずれが0mm、(b)はずれが9mmのときを示している。いずれの場合も不規則に振幅を変化させている。この運動の時間変動のスペクトルを図9に示す。図9(a)は図8(a)のスペクトルを、図9(b)は図8(b)のスペクトルを示している。どちらの場合も幅の狭いスペクトルが得られた。この角周波数は円筒容器の中心からのずれが大きいほど、小さくなる傾向を示した。実験は2種類の径のみで行ったので、径に対するスペクトルの関係を出すことはできなかった。しかし、中心位置からのずれが0mmの状態において、内径が115.9mmの境界のときは6.8rad/secを中心にスペクトルが立ち、内径が95.3mmのときは8.8 rad/secを中心にスペクトルが立ち、径とともに運動の角周波数が小さくなる傾向が見られた。

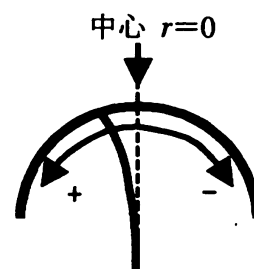


図7 運動の一次元射影

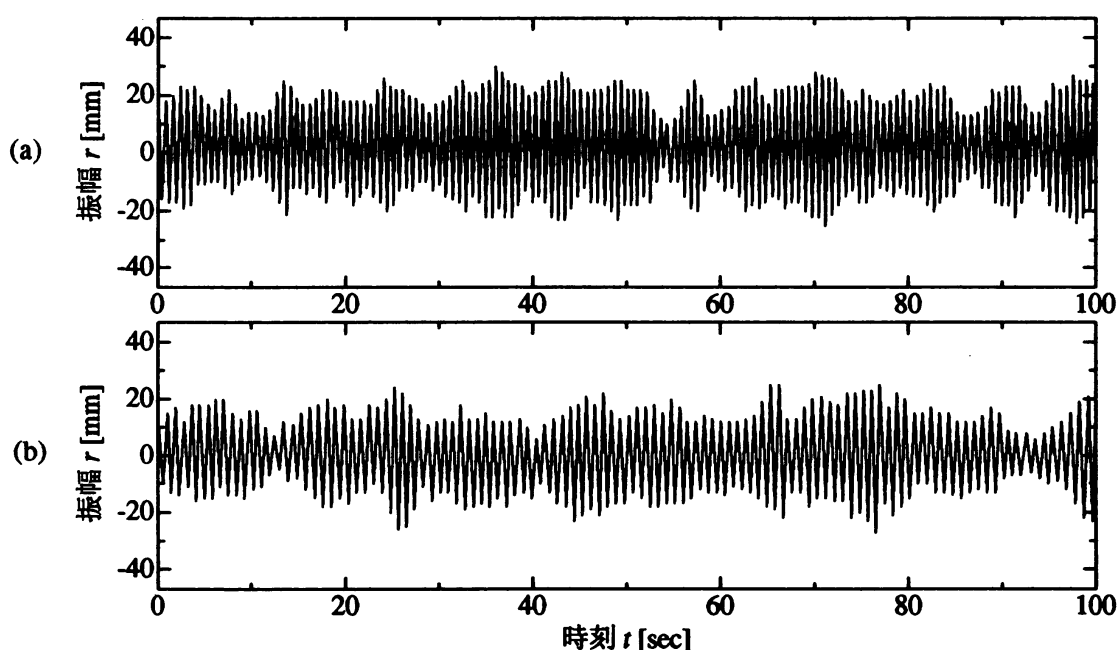


図8 運動の時間変動

図 10 に境界面の内径が 95.3mm のときの、中心からの距離と回転運動の速度との関係をプロットした。(a) は中心位置からのずれが 0mm、(b) は中心位置からのずれが 9mm のときのプロットである。回転速度は中心からの距離におおよそ比例しており、同じ中心からの距離に対して広がりを持つ。

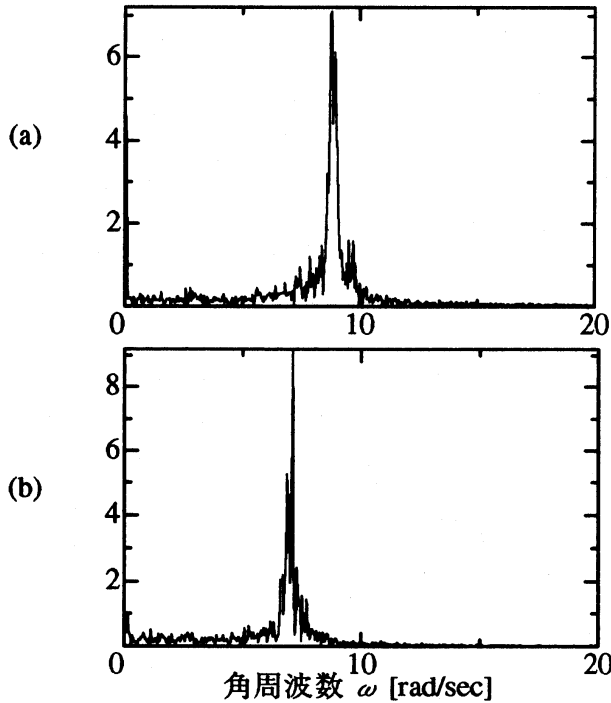


図 9 変動のスペクトル

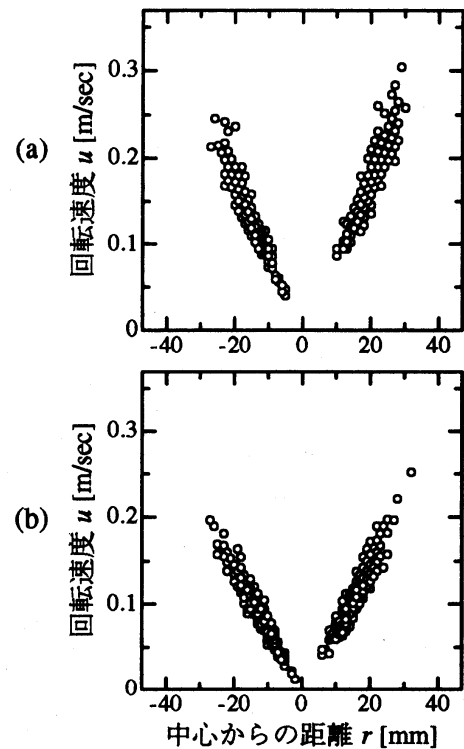


図 10 中心からの距離と回転速度

4. 考察

4.1. 局所誘導方程式

渦糸の運動は局所誘導方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Acb \\ A &= \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{L}{\sigma} \end{aligned} \quad (1)$$

で表わされる。^{1,6)} 渦糸の位置 x は渦糸に沿って測った長さ s と時刻 t の関数 $x(s, t)$ である。ここで、 c は渦糸の曲率、 b は倍法線方向の単位ベクトル、 Γ は渦糸の循環である。 L と σ はそれぞれ、渦糸の曲率半径と同程度、渦糸の径と同程度のオーダーである。ここで L は変化する可能性があるが、対数項の引数であるため A の変化は L に比べて非常に遅い。そのため A は定数とみなすことができる。この式から、渦糸の運動速度は渦糸の倍法線方向を持ち、渦糸の曲率に比例することが分かる。

4.2. 下に凸の境界面に対する渦糸

下に凸の球面に対して渦糸は静止状態となり、安定であることが観察された。この結果は以下のように定性的に考えられる。

流体は境界面に対して垂直な速度成分を持たない。それゆえ渦糸は境界面に対してつねに垂直になる。このため、下に凸の球面が円筒容器の中心位置にあるとき、鉛直に伸びた渦糸はその球面の中心に向かってまっすぐ伸び、境界面と直角に接して安定となる。そして、球面が容器の中心位置からずれたと

き、渦糸は球面に直角になるために球の中心に向かって湾曲して伸びる。このとき、(1)式から、渦糸はその曲率に比例した自己誘導速度を受ける。渦糸が境界面に対して垂直な状態を保ったまま、図 11 に示した b の誘導速度の方向に力を受けると、渦糸は図の破線の矢印のように境界面の周りを回転運動する。しかし、この運動の向きは渦糸自身の回転方向と逆向きである。つまり、局所的な誘導速度と大局的な誘導速度の向きが逆向きとなる。球面が中心位置からずれたとき、渦糸が球面に接して湾曲した状態で安定となるのは、この 2 つの誘導速度が釣り合っているためと予測される。これに関しては渦糸の曲率、循環を測定し、定量的に確認する必要がある。

4.3. 上に凸の境界面に対する渦糸

上に凸の境界面に対して渦糸は回転運動することが観察された。これは半球面の中心が不安定であることを示している。渦糸が半球面の中心からわずかにずれた場合を考える(図 12)。このとき、渦糸は境界に対して直角になろうとするため湾曲し、曲率を持つ。すると(1)式から自己誘導速度を受ける。境界に垂直な状態を保ったまま自己誘導速度によって移動するため、接触している境界は鉛直方向に対して傾いたままである。そのため渦糸は境界に沿って回転運動をすることになる。つまり、渦糸は一旦半球面の中心からずれてしまうと中心部で安定に静止することはない。また、この回転運動の方向は渦糸自身の回転方向と同じ向きであり、下に凸の場合のように大局的な誘導速度と釣り合って安定することもない。

振幅の不規則な変動は、図 10 の中心からの距離と回転運動との関係から説明することができる。図 5・6 の渦糸は上部のみが湾曲しているため、ある瞬間での渦糸の曲率は渦糸に沿って一定ではない。このため渦糸の運動速度は渦糸上の各点で異なる。この速度が中心からの距離に比例しているときは渦糸は同一平面状に乗ったまま振幅も形も変えずに回転運動する(図 13(a))。しかし、一点でも比例関係からはずれると、渦糸は時間とともに同一平面上からずれていく(図 13(b))。すると、その点での局所誘導速度の方向(b の方向)は回転方向以外の成分を持ち、運動の振幅が変化

する。図 10 にプロットした回転速度は中心からの距離に対してほぼ比例関係であるが、同じ振幅で広がりをもつ。これは同じ振幅であっても渦糸の形は全く同じではなく、曲率が異なるためだと考えられる。この

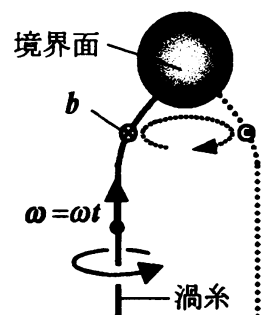


図 11 誘導速度の方向
 ω は渦糸の渦度、 t は接線ベクトルである。局所誘導方程式では接線ベクトルの方向を渦度の方向としている。

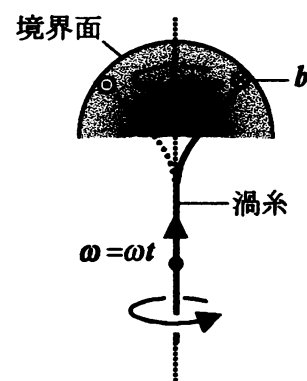


図 12 誘導速度の方向(2)

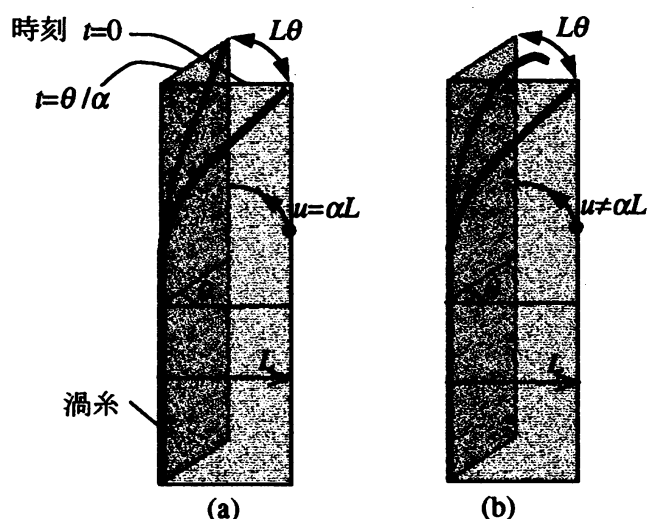


図 13 回転速度と渦糸の変形

回転速度の広がりのため、回転運動の振幅が不規則に変化すると考えることができる。

5. まとめ

渦糸は下に凸の球面に対して安定で、上に凸の半球面に対して不安定であることが分かった。実験により以下のことが観測された。まず、下に凸の球面に対しては、中心位置にずれがある場合でも渦糸は静止状態を保ち、渦糸をトラップすることが可能である。球が中心から完全にはずれた状態でも渦糸が境界面にトラップされ、静止する様子が観察された。そして、上に凸の球面に対しては、中心位置が揃っている場合もずれている場合も渦糸は不規則に回転運動をする。このとき、運動は境界面付近の上部のみである。この運動は狭い幅のスペクトルを持つ。

REFERENCE

- 1) 高木隆司：物理学最前線 21, 渦糸の理論, 共立出版 (1988)
- 2) H. Hasimoto : A soliton on a vortex filament. *J. Fluid Mech.* **51**, 477 (1972)
- 3) R. Takaki & A. K. M. F. Hussain : *Phys. Fluids*, **27**, 761 (1984)
- 4) H. Aref : Integrable, chaotic and turbulent vortex motion in two-dimensional flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **15**, 367 (1983)
- 5) 石井克哉, 桑原邦郎：渦運動とパターン形成, 日本物理学会誌 **39**, 745 (1984)
- 6) Batchelor, G. K. : *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press. (1967)